

Metode numerice pentru ecuații diferențiale. Simularea sistemelor

Probleme cu valori inițiale. Problema Cauchy

O clasă generală de modele, ca cea a sistemelor dinamice este caracterizată de variabilele de stare și descrise de un set de ecuații diferențiale. În general, se presupune că avem m ecuații diferențiale, fiecare de ordinul n_i , acestea pot fi transformate într-un sistem de $n = \sum_{i=1}^m n_i$ ecuații diferențiale de ordinul 1. Soluția este unică dacă se definesc n condiții inițiale.

Se definește problema cu valori inițiale (problema Cauchy):

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= f(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0\end{aligned}\tag{1}$$

unde $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ este vectorul variabilelor de stare și $\mathbf{x}_0 = [x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)]^T$ sunt condițiile inițiale corespunzătoare.

Metoda Euler

Pentru a introduce metoda Euler, vom considera versiunea scalară a problemei (1)

$$\dot{x}(t) = f(t, x), \quad t \in [t_0, t_n], \quad \text{cu } x(t_0) = x_0\tag{2}$$

Utilizând definiția derivatei lui x , rezultă:

$$\dot{x}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = f(t, x)\tag{3}$$

Ca urmare, pentru o valoare h mică, $x(t+h) \approx x(t) + hf(t, x)$. Este convenabil să se definească o variabilă discretă k , în locul variabilei continue timp t , ca $t \equiv t_k = hk + t_0$, unde $t_0 \leq t \leq t_n$ și $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Această transformare liniară este echivalentă cu discretizarea variabilei independente t în $n+1$ puncte, după cum este ilustrat de Figura 1. Se introduce variabila discretă x_k . Derivata se aproximează prin diferențe finite și rezultă:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t_k) &= \frac{x(t_k+h) - x(t_k)}{h} = \frac{x_{k+1} - x_k}{h} = f(t_k, x_k) \\ x_{k+1} &= x_k + hf(t_k, x_k)\end{aligned}\tag{4}$$

pentru $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Dacă funcția f nu depinde explicit de timp, relația (4) se scrie:

$$x_{k+1} = x_k + hf(x_k)\tag{5}$$

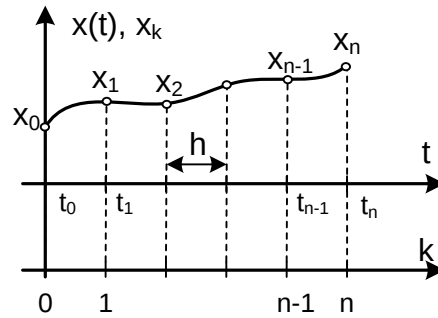


FIGURA 1. RELAȚIA ÎNTRE TIMPUL CONTINUU T ȘI TIMPUL DISCRET K

Dacă timpul este continuu (t), variabila de stare este semnalul $x(t)$ continuu. Dacă timpul este discret, variabila de stare este x_k . Pentru un pas h , suficient de mic, $x_k = x(t_k) = x(t)$.

Rezolvarea iterativă a ecuației (5) va aproxima soluția problemei (2). Se observă că toate variabilele din membrul drept al ecuației (5) sunt la timpul k , iar cea din membrul stâng, la $k+1$. Această metodă, se numește metoda Euler.

Metode Runge-Kutta

O familie de metode iterative pentru aproximarea soluțiilor ecuațiilor diferențiale este Runge-Kutta. Cea mai des utilizată dintre ele este metoda Runge-Kutta de ordinul 4 (notată prescurtat RK4), bazată pe aproximarea:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{6}h(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \quad (6)$$

unde:

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_k) \\ K_2 &= f\left(x_k + \frac{1}{2}hK_1\right) \\ K_3 &= f\left(x_k + \frac{1}{2}hK_2\right) \\ K_4 &= f(x_k + hK_3) \end{aligned} \quad (7)$$

Metoda este precisă, ușor de implementat și nu mai necesită evaluarea altor derivate.

Obs. Pentru probleme în care nu se cunosc condițiile inițiale ci se cunosc condițiile finale:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x), \quad \text{cu condițiile: } x(t_f) = x_f$$

aproximarea prin diferențe finite poate fi scrisă:

$$\dot{x}(t_k) = \frac{x(t_k) - x(t_k - h)}{h} = \frac{x_k - x_{k-1}}{h} = f(x_k)$$

$$x_{k-1} = x_k - hf(x_k), \quad k = n, n-1, \dots, 1 \quad (8)$$

Exerciții

1. Rezolvați sistemul de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases} \quad \text{cu condițiile inițiale } x_1(0) = 0, x_2(0) = 1, \quad \text{și } t \in [0, 3\pi]$$

- Determinați soluția analitică utilizând funcția Matlab *dsolve* (necesită SymbolicMath Toolbox).
- Rezolvați sistemul utilizând funcțiile Matlab *ode23* și *ode45*.
- Rezolvați sistemul de ecuații utilizând metoda Euler
- Rezolvați sistemul de ecuații utilizând metoda Runge-Kutta de ordinul 4
- Reprezentați grafic soluția în toate cazurile anterioare. Pentru soluția de la punctul a utilizați funcția Matlab *fplot*.
- Modificați pasul de integrare și urmăriți influența lui asupra rezultatelor
- Rezolvați problema dacă se cunosc condițiile finale $x_1(3\pi) = 0, x_2(3\pi) = -1$, pe același interval de timp.

2. Rezolvați ecuația diferențială de ordinul 3:

$$\ddot{x} = -x, \quad \text{cu condițiile inițiale } x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0, \ddot{x}(0) = 0, \quad \text{și } t \in [0, 10]$$

- Determinați soluția analitică utilizând funcția Matlab *dsolve* (necesită SymbolicMath Toolbox).
- Transformați ecuația diferențială de ordinul 3 într-un sistem de ecuații diferențiale de ordinul 1
- Rezolvați sistemul utilizând funcțiile Matlab *ode23* și *ode45*.
- Rezolvați sistemul de ecuații utilizând metoda Euler
- Rezolvați sistemul de ecuații utilizând metoda Runge-Kutta de ordinul 4
- Reprezentați grafic soluția în toate cazurile anterioare. Pentru soluția de la punctul a utilizați funcția Matlab *fplot*.
- Modificați pasul de integrare și urmăriți influența lui asupra rezultatelor

3. Se consideră un sistem – tren de jucărie - format dintr-o locomotivă și un vagon care se poate deplasa numai într-o singură direcție (Figura 2).



FIGURA 2.TREN

Masa locomotivei este M_1 și masa vagonului este M_2 . Locomotiva și vagonul sunt legate între ele cu un resort care are constanta elastică k . Trenul se deplasează cu frecare, cu constanta de frecare μ . Forța dezvoltată de locomotivă se notează cu $F(t)$. Forțele care acționează asupra fiecărei componente a sistemului sunt reprezentate în Figura 3 unde cu $x_1 = x_1(t)$ și $x_2 = x_2(t)$ s-au notat deplasările pe orizontală pentru locomotivă și respectiv pentru vagon.

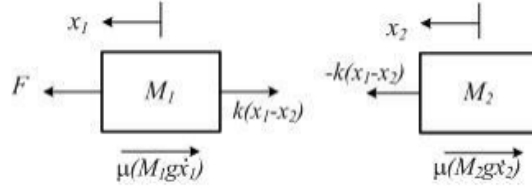


FIGURA 3. FORȚELE DIN SISTEM

Conform legii a 2-a a lui Newton, suma forțelor care acționează asupra fiecărui corp este egală cu masa sa înmulțită cu accelerație. În acest caz, forțele care acționează asupra corpului de masă M_1 sunt forța aplicată de locomotivă, forța elastică a resortului și forța de frecare. Forțele care acționează asupra corpului de masă M_2 sunt forța elastică și forța de frecare. Ecuațiile de mișcare pe orizontală sunt:

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{x}_1(t) &= F(t) - k(x_1(t) - x_2(t)) - \mu M_1 g \dot{x}_1(t) \\ M_2 \ddot{x}_2(t) &= k(x_1(t) - x_2(t)) - \mu M_2 g \dot{x}_2(t) \end{aligned} \quad (11)$$

Valorile constantelor sunt: $M_1 = 1 \text{ kg}$, $M_2 = 0.5 \text{ kg}$, $k = 1 \text{ N/s}$, $\mu = 0.002 \text{ s/m}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Semnalul de intrare pentru acest sistem este forța locomotivei $u(t) = F(t)$. Ca variabile de stare se aleg următoarele mărimi: deplasarea locomotivei $z_1(t) = x_1(t)$, viteza locomotivei $z_2(t) = \dot{x}_1(t)$, deplasarea vagonului $z_3(t) = x_2(t)$, viteza vagonului $z_4(t) = \dot{x}_2(t)$.

- a. Scrieți ecuațiile de stare în formă matricială:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (12)$$

- b. Alegeți un set de condiții inițiale potrivit aplicației.
c. Considerați că ieșirile procesului sunt: deplasarea locomotivei și deplasarea vagonului. Scrieți matricile $\mathbf{C}$ și $\mathbf{D}$ de dimensiuni corespunzătoare, astfel încât să obțineți ecuația de ieșire sub formă matricială:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{z}(t) + \mathbf{D}u(t) \quad (13)$$

- d. Simulați răspunsul sistemului pentru o intrare treaptă unitară în Simulink, din condițiile inițiale de la punctul b.
e. Rezolvați sistemul (12), cu condițiile inițiale alese la punctul a, utilizând funcția Matlab `ode23`. Considerați intrarea $u(t)=1$. Reprezentați grafic evoluția în timp a variabilelor de stare z_1 și z_3 . Comparați rezultatele cu cele obținute la punctul d.
f. Rezolvați sistemul (12), cu condițiile inițiale alese la punctul b, utilizând metoda Runge-Kutta de ordinul 4. Considerați intrarea $u(t)=1$. Reprezentați grafic evoluția în timp a variabilelor de stare z_1 și z_3 . Comparați rezultatele cu cele obținute la punctele d și e.
g. Rezolvați sistemul (12), cu condițiile inițiale alese la punctul b, utilizând metoda Euler. Considerați intrarea $u(t)=1$. Reprezentați grafic evoluția în timp a variabilelor de stare z_1 și z_3 . Comparați rezultatele cu cele obținute la punctele d, e și f.
h. Dacă ieșirile sistemului sunt toate variabilele de stare, scrieți matricile $\mathbf{C}$ și $\mathbf{D}$ și ecuația de ieșire (13).